Шексіз үлкен және шексіз кіші тізбектер.

Тізбектің шегі.

Егер $\forall\varepsilon > 0$ саны және $\forall n \ge n_\varepsilon$ үшін $|x_n| > \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын n_ε нөмірі табылса, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегін *шексіз үлкен тізбек* деп атайды**.**

Есеп. $x_n = (-1)^n n$ тізбегі шексіз үлкен екенін дәлелдеңіз.

Дәлелдеуі. $\forall\varepsilon > 0$ аламыз. Мақсатымыз: $|x_n| > \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын n_ε нөмірін табу. $|x_n| > \varepsilon \iff |(-1)^n n| > \varepsilon \iff n > \varepsilon$.

Ендеше, $n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1$.

Егер $\forall\varepsilon > 0$ саны және $\forall n \ge n_\varepsilon$ үшін $|x_n| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын n_ε нөмірі табылса, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегін *шексіз кіші тізбек* деп атайды**.**

Есеп. $x_n = \frac{1}{n!}$ тізбегі шексіз кіші екенін дәлелдеңіз.

Дәлелдеуі. $\forall\varepsilon > 0$ аламыз. Мақсатымыз: $|x_n| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын n_ε нөмірін табу. $|x_n| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n!}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n!} < \varepsilon$. Соңғы теңсіздікті бағаласақ,

$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$, ізделінді нөмірді мына теңсіздіктен табамыз:

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon. \Rightarrow 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n-1 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Егер $\forall\varepsilon > 0$ саны және $\forall n \ge n_\varepsilon$ үшін $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын n_ε нөмірі табылса, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегі *a санына жинақталады деп айтамыз және* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ деп жазамыз.

Есеп. $x_n = \frac{n}{n+1}, \quad (n = 1,2,\ldots)$ тізбегі берілген.

Дәлелдеу керек: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Дәлелдеуі: $\forall\varepsilon > 0$ аламыз. Мақсатымыз: $|x_n - 1| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын n_ε нөмірін табу. .

$$|x_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow$$

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Монотонды тізбектің шегі. e саны.

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\uparrow} e$ тізбегі жинақты екені белгілі..

$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\downarrow}$ тізбегі кемімелі және e санына жинақталатын көрсету керек.

► $\forall n \in N \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = x_n$,

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[x_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$. ◄

Бұл формулулардан $\forall n \in N \quad x_n < \text{e} < y_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in N$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \text{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$ аламыз.

Соңғы қосарлы теңсіздікті негізі e > 1 бойынша логарифмдесек:

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Бұдан: $\forall n \in N \qquad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Айталық, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегінің барлық мүшелері оң анықталсын, яғни, $\forall n \in N \quad x_n > 0$. Осы шарт орындалса тізбектің монотондылығын басқа тәсілмен беруге болады. - Бұл тізбек *өспелі (кемімейтін, кемімелі, өспейтін)* болады, егер $\forall n \in N \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ($\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$).

Есеп. Монотонды және шектелген тізбектің шегі бар екені туралы теореманы қолданып, тізбектің жинақты екенін дәлелдеу керек:

$x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

Дәлелдеуі. 1) Тізбектің барлық мүшелері оң.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}\cdot\frac{n+10}{2n+1}}{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}} = \frac{n+10}{2n+1} < 1, \quad \text{егер} \qquad n+10 < 2n+1, \qquad n > 9.$$

Демек, тізбектің мүшелері $n > 9$ мүшесінен бастап кемімелі, $x_{n+1} < x_n$, болады.

2) шектелгендігі

$0 < x_n < \max\{x_1, x_{10}\}$

Теорема бойынша, тізбек монотонды және шектелген, онда ол тізбек жинақты.

Сандық тізбектің жинақтылығы үшін Коши критерийі

Теорема (Коши критерийі). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегі жинақты (**R**-де, яғни,ақырлы шегі бар) $\Leftrightarrow$ ол *фундаментальді (іргелі)* $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Есеп. Коши критерийін қолданып, тізбектің жинақты екенін дәлелдеу керек:

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

Дәлелдеуі.

$\forall\varepsilon > 0$, $\forall\rho \in N$ сандары берілген. $|x_{n+p} - x_n|$ айырымын қарастырамыз:

$$|x_{n+\rho} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+\rho)!}{(n+\rho)(n+\rho+1)}\right| \leq \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos(n+\rho)!}{(n+\rho)(n+\rho+1)}\right| \leq$$

$\forall x \in \mathbf{R}$ үшін $|\cos x| \leq 1$ теңсіздігін пайдалансақ,

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+\rho)(n+\rho+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+\rho}-\frac{1}{n+\rho+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+\rho+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

$n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, $\quad n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Ізделінді нөмір табылды. Ендеше тізбек *фундаментальді (іргелі)* $\Leftrightarrow \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in$ **R.**

Есеп. Тізбектің $\inf x_n, \sup x_n, \underline{\lim} x_n, \overline{\lim}\, x_n$ табу керек.

$$x_n = 1+2(-1)^{n+1}+3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad (n=1,2,...).$$

Шешуі.

1) $n=4k-3$,

$x_{4k-3}=1+2+3=6 \xrightarrow[k\to\infty]{} 6,$

2) $n=4k-2$,

$x_{4k-2}=1-2-3=-4 \xrightarrow[k\to\infty]{} -4,$

3) $n=4k-1$,

$x_{4k-1}=1+2-3=0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$

4) $n=4k$,

$x_{4k}=1-2+3=2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 2,$

$Lim x_n=\{-4,0,2,6\}$ **,** $\quad \inf x_n=-4, \quad \sup x_n=6, \quad \underline{\lim} x_n=-4, \quad \overline{\lim}\, x_n=6$